Lundi 20 au mercredi 22 novembre 2017

Stage Hippocampe

IREM Aix-Marseille

L'ensemble de Cantor

BOSQ Mickael

DIAZ Anna

GAUDIN Anne-Lou

MELQUIOND Mathilde

PINOTEAU Benjamin

Pendant ces trois jours dans le cadre du stage Hippocampe, notre classe s'est vue attribué un travail sur les fractales. Notre groupe composé de Melquiond Mathilde, Gaudin Anne-Lou, Diaz Anna, Bosq Mickaël et Pinoto Benjamin a travaillé sur l'ensemble de Cantor et ses propriétés.

Présentation de la problématique

Georg Cantor est un mathématicien allemand. Il est célèbre pour la création de la théorie des ensembles. En effet grâce cet ensemble il établit l'importance de la bijection entre les ensembles (si et seulement si tout élément de son ensemble d'arrivée a un et un seul antécédent), il définit les ensembles infinis. Il prouve également que les nombres réels sont « plus nombreux » que les entiers naturels.

Sa théorie des ensembles comprend l'ensemble de Cantor, un sous-ensemble remarquable de la droite réelle que Georg Cantor construit en 1874. Il s'agit d'un sous-ensemble fermé de l'intervalle unité [0, 1]. On le construit de manière itérative à partir du segment en enlevant le tiers central, puis on réitère l'opération sur les deux segments restants, et ainsi de suite.

L'ensemble de Cantor est donc l'intersection de ces segments.

Il implique l'existence d'une infinité d'infinis. Le travail de Cantor est une révolution pour la science mathématiques mais est également d'un grand intérêt philosophique, ainsi il a donné lieu à diverses interprétations et à de nombreux débats.

En effet une grande majorité des mathématiciens de l'époque de Cantor étaient en désaccord avec son travail. Ce n'est qu'au XXème siècle que la valeur des travaux de Cantor est reconnue par un plus grand nombre, à l'exception d'une partie du courant constructiviste qui s'inscrit à la sui te des idées du XIXème siècle.

On nous a donné une liste de questions auxquelles nous devions répondre afin de trouver l'intérêt de l'ensemble de Cantor :

1. Calculer la longueur des intervalles supprimés.
2. Calculer la dimension de l'ensemble de Cantor C.
3. Décrire l'écriture en base 3 des points appartenant à C.
4. Montrer que C n'est pas dénombrable, c'est-à-dire construire une application $\emptyset : C \rightarrow [0, 1]$ qui est surjective.
5. Montrer que C est parfait : pour chaque point $x \in C$ il y a une suite $\subset (x_n)_{n \in N}$ $C \setminus \{x\}$ tel que $x_n \rightarrow x$

Résumé de nos recherches

1. Calculer la longueur des intervalles supprimés.

Tout d'abord nous avons cherché à calculer la longueur des intervalles supprimés. Pour cela nous avons d'abord calculé celle-ci à chaque « étape » :

Etape 0 : A cette étape le segment reste intact, rien n'est supprimé donc $C_0=0$

Etape 1 : On a supprimés le tiers du milieu, soit $C_1= 1/ 3$

Etape 2 : On a supprimé les tiers des segments restant, sans oublier d'y ajouter le tiers enlevé précédemment soit $C_2= (1/3)+[(1/3)*(1/3)]*2$, ainsi nous avons obtenus $C_2=5/9$

Etape 3 : Nous avons répété ce processus, ainsi $C_3=(5/9)+[(1/3)*(1/3)*(1/3)*2^2$ et obtenu $C_3=19/27$

Ainsi nous avons retrouvés une formule de suite géométrique (en commençant par C_1 puisque $C_0=0$) :

$C_{n+1} = C_n + (1/3)^{n+1} * 2^n$

Elle permet de calculer la longueur supprimée à un certain rang n+1.

Grace à cette suite géométrique nous avons fait la somme des termes de cette suite :

S= 1er terme*$(1-q^{\text{nombre de termes}})/(1-q)$

$S= (1/3)*[1-(2/3)^{n+1}]/[1-(2/3)]$

$S= 1- (2/3)^{n+1}$

Il s'agit de la longueur des intervalles totaux supprimés.

2. <u>Calculer la dimension de l'ensemble de Cantor C.</u>

Cela nous a permis, grâce au calcul de l'inverse de la somme S, de calculer la mesure de l'ensemble de Cantor.

En effet, ne connaissant pas la notion de « dimension » abordée dans la question 2, nous avons décidé de calculer seulement la mesure de cet ensemble en s'appuyant sur la mesure de Lebesgue (Cette notion étant très complexe et étudiée à un niveau supérieur, nous ne l'avons pas détaillée).

$m(C_n) = 1- (1- (2/3)^{n+1}) = (2/3)^{n+1}$

Nous avons décidés finalement de partir de U0 car il est compris dans l'ensemble de Cantor, ainsi nous avons réécrit la formule précédente en modifiant n+1 en n, tel que :

$m(C_n)= 1-(1-(2/3)^n)$ soit $m(C_n) = (2/3)^n$

L'ensemble de Cantor étant l'intersection de ces Cn, nous avons donc étudié la limite de Cn lorsque n tend vers 0 : Lim $(2/3)^n = 0$

Ainsi la mesure de C est nulle.

3. <u>Décrire l'écriture en base 3 des points appartenant à C</u>.

Nous avons ensuite tenté de décrire l'écriture en base 3 des points appartenant à l'ensemble de Cantor.

Tout d'abord, il faut déterminer ce qu'est l'écriture en base 3. Cette notion étant nouvelle pour nous, nous avons tenté de bien détailler son explication à l'aide d'exemples pour mieux la comprendre.

L'écriture en base 3 correspond au système ternaire, c'est-à-dire que dans ce système, la base est 3. On décompose le nombre en fonction des puissances de 3, et non de 10. En écrivant en base de 3, seuls les entiers positifs 0, 1 et 2 apparaissent avant de basculer vers la puissance de 3 suivante.

Afin de mieux comprendre, nous pouvons le comparer au système décimal (base de 10) qui est la base la plus commune, et de nos jours la référence dans le domaine des sciences. En effet en base de 10, l'unité étant 10 seuls apparaissent les nombres entiers positifs de 0 à 9 avant de « passer » à l'unité suivante.

Ex.

$110 = 1*10^2+1*10+0*10^0$ → décomposition en base de 10

$110= 1*3^2+1*3+0*3^0$ → décomposition en base de 3

110 (en base de 3) = $1*3^2+1*3+0*3^0$ = 12

Ainsi 110 en base de 3 correspondrait à 12 en base de 3.

Nous avons commencé par décrire tous les intervalles de l'ensemble de Cantor en base 10 :

A l'étape C_0 : [0 ; 1]

A l'étape C_1 : [0 ; 1/3] U [2/3 ; 1]

A l'étape C_2 : [0 ; 1/9] U [2/9 ; 3/9] U [6/9 ; 7/9] U [8/9 ; 1]

…

Ensuite nous avons converti toutes les bornes des intervalles en base 10 trouvés précédemment, en base 3 en exprimant chaque borne en base 3 :

$1/3= 0*3^0+1*3^{-1}+0*3^{-2}= 0.10$ en base 3

$2/3= 0*3^0+1*3^{-1}+1*3^{-2}= 0.20$ en base 3

…

Nous avons donc trouvé les intervalles suivants :

Etape C_0 : [0 ; 1]

Etape C_1 : [0 ; 0.10] U [0.20 ; 1]

Etape C_2 : [0 ; 0.01] U [0.02 ; 0.10] U [0.20 ; .021] U [0.22 ; 1]

Après avoir trouvé les intervalles, nous avons encadré X :

Etape C_0 : $0 \leq X \leq 1$

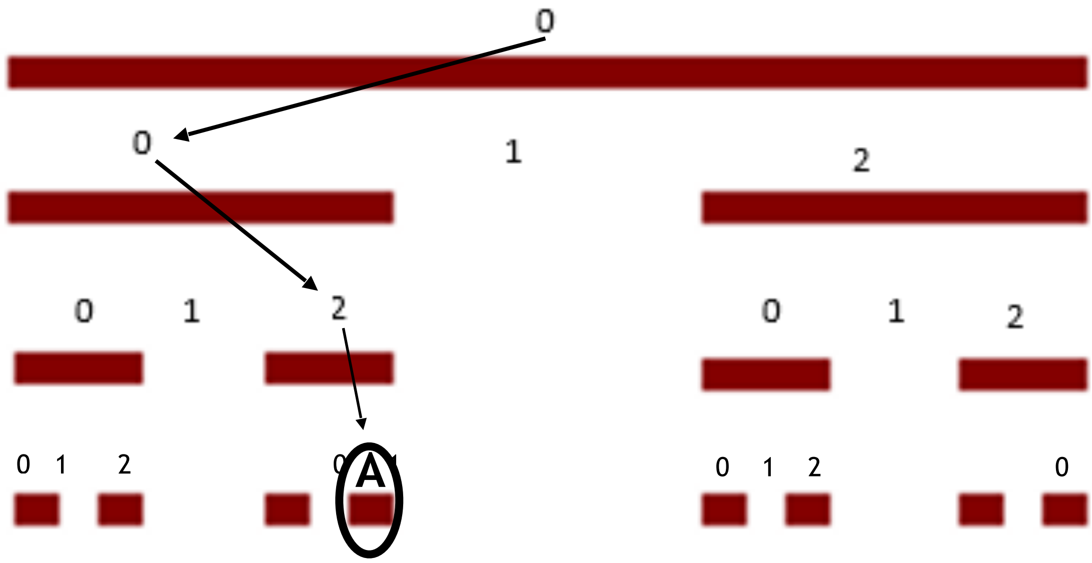
Etape C_1 : $0 \leq X \leq 0.1$ ou $0.2 \leq X \leq 0.1$

Etape C_2 : $0 \leq X \leq 0.01$ ou $0.02 \leq X \leq 0.1$ ou $0.2 \leq X \leq 0.21$ ou $0.22 \leq X \leq 1$

Etc…

L’étude de l’ensemble de Cantor nous permet de remarquer qu’après avoir nommé chaque intervalle en base 3, il est possible de déterminer l’écriture décimale d’un point A, appartenant à l’ensemble, situé sur un certain rang en suivant le « chemin » parcouru pour l'atteindre.

Par exemple, pour un point A appartenant à l'intervalle entouré à l'étape 3 (voir le schéma ci-dessous), il faut passer par les intervalles suivants: [0 ; 1] puis [0 ; 0.1] puis [0.02 ; 0.1] et enfin [0.02 ; 0.021]



D’après cet exemple, les points situés dans l’intervalle entouré commencent par 0.022…

On nomme chaque tiers du segment précédant « 0 », « 1 » ou « 2 » (voir schéma). En supprimant le tiers central de chaque segment, on remarque qu'il s'agit de l'intervalle nommé « 1 ». Or lorsqu'on avait précédemment trouvé les intervalles en base 3 nous avions des « 1 » comme par exemple dans les intervalles [0 ; 0.10] ou [0.20 ; .021] . Nous avons donc trouvé ça bizarre de supprimer les intervalles « 1 » et de quand même présenter des « 1 » dans nos intervalles de l'ensemble de Cantor. Nous avons donc cherché à prouver, grâce à l'aide de notre tuteur, que 0.1 peut aussi s'écrire 0.02222222… en base 3.

Démonstration de 0.1= 0.022222… :

- Commençons par décomposer 0.02222… en base 3 :

  $0.0222… = 0*3^0+0*3^{-1}+2*3^{-2}+2*3^{-3}…$

- Ensuite nous avons exprimé cette égalité sous forme de suite géométrique:

  $S=0*3^0+0*3^{-1}+2(3^{-2}+3^{-3}+3^{-4}+…+3^{-n-1}) = 0*3^0+0*3^{-1}+2x3^{-2}(1+3^{-1}+3^{-2}+3^{-3}+…+3^{-(n-1)})$

  $=2x3^{-2}(1+3^{-1}+3^{-2}+3^{-3}+…+3^{-(n-1)})$

  $=(2x3^{-2})x1x([1-(1/3)^n]/1-(1/3)$

  On cherche maintenant la limite de cette égalité lorsque n tend vers 0;

  $\lim(1/3)^n=O$ car $1/3 €]-1;1[$

  ainsi $\lim(2x3-2)x1x([1-(1/3)^n]/1-(1/3)= (2x3^{-2})x1x(1/1-(1/3))$

  $=(2x3^{-2})x1x(1/((3/3)-(1/3))$

  $=(2x3^{-2})x1x(3/2)=2x3^{-2}x(3/2)$

  $=3^{-2}x3^1 = 3^{-1}$

  $=1/3$

  Donc 0,0222… en base 3 est égal à 1/3 en base 10, soit 0,1 en base 3.

- Ainsi les nombres de l'ensemble de Cantor sont les nombres qui s'écrivent uniquement avec le chiffre 0 et le chiffre 2.

4. Montrer que C n’est pas dénombrable, c’est-à-dire construire une application Ø : C → [0 , 1] qui est surjective.

Afin de démontrer que l’ensemble est indénombrable, soit qu’on ne peut pas lister ses éléments, nous n’avons pas utilisé la méthode indiquée dans la question, mais un raisonnement par l’absurde en cherchant une contradiction.

En considérant C dénombrable, on a pu lister les éléments de la suite de cette façon.

$A_1 =$ 0, $X^1{}_1$ $X^1{}_2$ $X^1{}_3$ $X^1{}_4$ $X^1{}_5$ $X^1{}_6$ …

$A_2 =$ 0, $X^2{}_1$ $X^2{}_2$ $X^2{}_3$ $X^2{}_4$ $X^2{}_5$ $X^2{}_6$ …

$A_3 =$ 0, $X^3{}_1$ $X^3{}_2$ $X^3{}_3$ $X^3{}_4$ $X^3{}_5$ $X^3{}_6$ …

$A_4 =$ 0, $X^4{}_1$ $X^4{}_2$ $X^4{}_3$ $X^4{}_4$ $X^4{}_5$ $X^4{}_6$ …

$A_5 =$ 0, … $X^5{}_5$

$A_6 =$ 0, … $X^6{}_6$

Pour $X^j{}_i$= {0 ;2} avec i et j dans IN

Si on liste ainsi les éléments de la suite indéfiniment, on peut créer un nombre B en utilisant un chiffre contraire dans chaque élément de la suite :

Ainsi si l’on prend $X^1{}_1 = 0$, on va créer un nombre qui aura « l’inverse » de $X^1{}_1$

soit $\overline{X^1{}_1}$= 2.

En prenant un $\overline{X^j{}_i}$ inverse de chaque $X^j{}_i$ de la liste pour chaque A_i dans notre nouveau nombre, on obtiendra :

B = $\overline{X^1{}_1}$ $\overline{X^2{}_2}$ $\overline{X^3{}_3}$ $\overline{X^4{}_4}$ $\overline{X^5{}_5}$ $\overline{X^6{}_6}$ …

Par exemple si $X^1{}_1 = 0$ alors $\overline{X^1{}_1}$= 2, si $X^2{}_2 = 2$ alors $\overline{X^2{}_2}$= 0 et si $X^3{}_3 = 0$ alors $\overline{X^3{}_3} = 2$, etc… , on construit le nombre de cette façon : B=0,202…

Ainsi ce nombre n’appartient pas à la liste, mais il comporte uniquement des 0 et des 2 (démonstration précédente) donc il appartient à l’ensemble de Cantor. Ce qui contredit l’hypothèse que la liste les contient tous

Nous venons de démontrer par l’absurde que l’ensemble de Cantor est indénombrable, il contient donc une infinité de nombres.

5. <u>Montrer que C est parfait : pour chaque point $x \in C$ il y a une suite $(x_n)_{n \in N}$ $C \setminus \{x\}$ tel que $x_n \to x$</u>

Enfin, nous devions prouver que « C est parfait », c'est à dire qu'il est un ensemble fermé sans point isolés. Malheureusement par manque de temps et de compréhension nous n'avons pas trouvé de pistes concrètes ni n’avons de réelles traces écrites. Notre seule piste de réflexion afin de démarrer, était de considérer que comme :

$\lim_{n \to +\infty} x_n \quad x$ alors $\lim_{n \to +\infty} x_n - x = 0$

Prolongement intéressant à exploiter

Afin de prolonger les recherches sur l'ensemble de Cantor, il aurait été intéressant de refaire les calculs de longueur des intervalles supprimés et donc de déterminer la mesure de cet ensemble en changeant la mesure de la partie enlevée sur le segment. C'est-à-dire qu'il s'agirait non plus de découper le segment en trois et d'enlever le tiers central et ainsi de suite sur chaque segment restant mais de découper le segment initial [0,1] en cinq parties égales. Ensuite il s'agirait d'enlever le cinquième central (=1/5) de même manière que cela avait été fait précédemment avec le tiers. Cela reviendrait à laisser seulement 2/5 de chaque côté des segments retirés.

De nouveau par manque de temps, nous n'avons pas pu réaliser les calculs nécessaires mais il est fortement possible que cette modification induise des changements conséquents sur les propriétés de l'ensemble. Cela jouerait sûrement sur l'indénombrabilité ou l’indéfinissabilité de l'ensemble.

Conclusion

Après avoir étudié l'ensemble de Cantor, nous avons pu montrer qu'il s'agissait d'un ensemble de mesure nulle, puisque sa mesure a pour limite 0 lorsqu'il tend vers l'infini (vu dans la question 2). Cet ensemble est également indénombrable, il contient une infinité de points (démontré dans la question 4). Ainsi il s'agit d'un ensemble indéfini et indénombrable, ce qui pourrait nous paraître paradoxal voire contre la logique mathématiques: un ensemble vide ne devrait pas pouvoir contenir une infinité de nombres. Ces propriétés paradoxales ont perturbé les mathématiciens du XIXe siècle. Il sert donc d'exemple pour montrer qu'il existe des ensembles infinis non dénombrables mais négligeables au sens de la mesure de Lebesgue. C'est aussi le premier exemple de fractale bien que le terme ne soit apparu qu'un siècle plus tard. L'ensemble de Cantor est à l'origine de nombreuses figures comme le tapis de Sierpinsky ou la courbe de Koch (le flocon de Koch).

Bilan personnel de cette expérience

Ce stage a été très enrichissant pour nous à plusieurs niveaux. Premièrement ce travail nous a permis de découvrir de nouveaux outils mathématiques, comme les fractales sur lesquelles nous avons pu approfondir nos connaissances, mais aussi l'écriture en base de 3 qui s'est révélée être un outil plutôt facile à comprendre mais bien plus compliqué à expliquer ! Ainsi, la présentation de nos recherches faites dans un premier temps au reste des élèves de la classe puis le lendemain à de véritables professionnels nous a permis de s'entraîner à prendre la parole devant une ou un groupe de personne. Il nous a fallu expliquer nos recherches de manière claire et suffisamment compréhensibles par nos camarades n'ayant pas travaillé sur un sujet similaire au notre, mais également devant des mathématiciens expérimentés connaissant très bien les outils et les méthodes exposées devant eux. De plus, cet exposé oral devait se faire en groupe, faisant ainsi appel à un minimum d'organisation et de travail de groupe, dont nous avons constaté la complexité!

Tout au long de notre stage, nous avons dû faire face à de nouvelles méthodes d'apprentissage. Nous devions à la fois effectuer un travail de groupe, ce qui était assez inhabituel pour nous qui sommes habitués au système scolaire du lycée, ainsi prendre le meilleur de chacun de nous afin de s'entraider et de rassembler nos connaissances. De plus l'autonomie était nécessaire pour ces 3 jours, même si notre tutrice nous a beaucoup aidé. Cette autonomie nous obligeait à nous pencher à plusieurs reprises sur nos divers calculs afin de les vérifier et de les corriger, et de chercher de nombreuses pistes de résolution différentes avant de trouver la bonne au lieu de simplement attendre une correction du professeur. Selon nous ce travail a été très bénéfique car il nous a permis de réfléchir peut-être d'avantage de nous même que nous le faisons à notre habitude.

Enfin, la rédaction de notre rapport de stage nous a emmener encore une fois à un travail de groupe et un effort d'organisation mais également de rédaction et de syntaxe. Nous avons dû nous replonger dans notre travail fait quelques jours auparavant et tenter d’expliquer nos recherches ce qui s’est avéré plus compliqué que prévu. Retranscrire nos recherches mathématiques de manières à ce qu’elles soient claires est un travail plutôt complexe mais qui s’avère en fin de compte intéressant puisqu’utiles dans toutes nos études futures.