HAMELIN Adèle **Lycée Marseilleveyre**
METZGER Joé ***T.S3***
PETIT Charlotte
SIMONPIETRI Mattéo

LE TAPIS DE SIERPINSKI

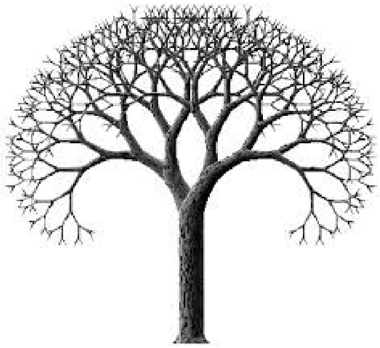
Année scolaire 2017-2018

SOMMAIRE

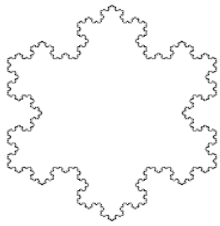
Introduction

Les fractales sont présentes partout autour de nous ! Par exemple, on les retrouve beaucoup dans la nature : les flocons de neige, les ramifications des branches, les fougères et tant d'autres.

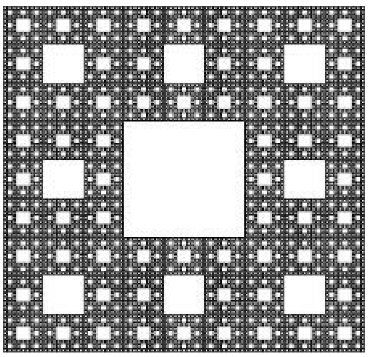




Le mathématicien français Benoît MANDELBROT en fit l'objet d'une nouvelle discipline mathématique en 1974, cependant les fractales étaient déjà présente dans notre monde depuis longtemps. Le terme «fractal» est issu du latin «fractus» qui signifie brisé, irrégulier.
les nomma «fractales» qui en latin signifie brisée, irrégulier. Ce terme défini bien ce qu'est cet objet intriguant : un objet fractal est un objet aux contours irréguliers et fragmentés qui se répète à l'infini itération après itération en diminuant de grandeur. Par conséquent, ce sont des figures géométriques «ayant la propriété de pouvoir être décomposées en parties de telle façon que chaque partie soit une image réduite du tout». On observe donc une autosimilarité à toutes les échelles.
L'un des mathématiciens les plus connus ayant travailler sur ce sujet est Helge Von Koch qui étudia le flocon, soit la courbe de Von Koch.



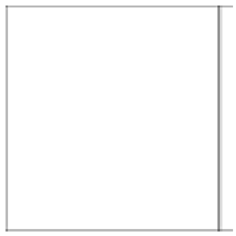
Dans notre cas, Le tapis de Sierpinski a été imaginé en 1916 par le mathématicien Waclaw Sierpinski. Cette fractale consiste a diviser un carré en neuf puis retirer celui du milieu n fois.
On obtient donc à chaque itération huit nouveaux carrés dont la longueur est un tiers de celle des carrés de l'itération précédente.



I. <u>Quelle est l'aire du carrée de Sierpinski ?</u>

Nous allons ici calculer l’aire du tapis pour différentes itérations.

<u>Étape 0</u>



Prenons notre carré de côté 1

Son aire est égale à 1*1=1

Notons ainsi U_0=1

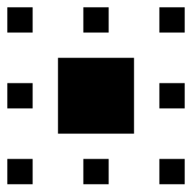
<u>Étape 1</u>

On réalise une première construction

L’aire du tapis est donc égale à l’aire totale du carré moins le carré central enlevé dont l’aire est de 8/9

On obtient donc U_1= 1 - 1/9 = 8/9

<u>Étape 2</u>



On répète cette opération une seconde fois.

Cette fois, l’aire totale du tapis est égale à l'aire de la construction précédente moins l'aire totale des 8 carrés enlevés.

L'aire des 8 carrés enlevés est de (1/9)*(8/9) = 8/81

Donc U_2= (8/9) – (8/81) = (64/81)

<u>Étape 3</u>

Après avoir répéter cette opération un troisième fois, on s'aperçoit que le schéma de réflexion est lemême que précédemment : l'aire du carré à l'étape 3 est égale àl'aire de la construction précédente moins l'aire des 64 carrés enlevés.

On a donc U_3 = (64/81) – (64/81)*(1/9) = 512/729

<u>Étape 4</u>

On réalise une quatrième fois l'opération afin de confirmer la suite de récurrence probable. L'aire du tapis est égale à l'aire du tapis de la troisième étape moins l'aire des carrés enlevés. L'aire des carrés enlevés est égale à 1/9 de l'aire précédente donc (512/729)*(1/9)= 512/6561

Soit U_4 = (512/729) – (512/6561) = 4096/6561

On remarque qu'on a une formule de récurrence : $U_{n+1} = U_n + U_n * (1/9) = U_n – (U_n/9)$ avec $U_0=1$

Or (U_n) est une suite géométrique de raison 8/9. On peut donc écrire (U_n) sous forme explicite :
$U_n = U_0 * (8/9)^n = (8/9)^n$.

On a ensuite calculé la limite de l'aire : -1 < 8/9 < 1 donc la limite de la suite est 0.
Plus n tend vers 0, plus la limite se rapproche de 0. C'est à dire, que l'aire sera égale à 0 pour l'itération n, soit qu'on aura enlevé toute la surface du tapis à l'itération n.

II. Calcul de la dimension du tapis

Contrairement à l'habitude, la dimension en géométrie fractale ne s'exprime pas avec à des entiers naturels (1ère Dimension (ligne), 2D, 3D, etc…) mais grâce à la résolution d'une équation :
L'inverse de la longueur des carrés qui apparaissent exposant la dimension est égale au nombre de carrés qui apparaissent.
A l'itération Un+1, 8 nouveaux carrés apparaissent d'une longueur d'un tiers de l'itération Un.
On a donc : $[(1/1/3)^n]^D = 8^n$

$\Rightarrow \log(3^n)^D = \log(8^n)$

$\Rightarrow D \log(3^n) = \log(8^n)$

$\Rightarrow D = \log(8^n) / \log(3^n)$

$\Rightarrow D = n \log(8) / n \log(3)$

$\Rightarrow D = 1{,}89$

Le tapis de Sierpinski a donc une dimension d'environ 1,89 à l'énième itération.

III. Lien avec l'ensemble de Cantor

On cherche à savoir si le tapis de Sierpinski contient des segments horizontaux.
A chaque itération on retire au milieu du tapis un carré de côté un tiers de la longueur de l'itération précédente. Il reste donc un tiers de cette longueur de chaque côté du carré.
On peut donc faire le lien avec le segment de Cantor, une autre fractale qui consiste à diviser un segment en trois puis retirer le tiers du milieu. En somme le tapis de Sierpinski revient à procéder de la même manière sur R^2 .
On a donc une quantité indénombrable de ces segments horizontaux appartenant tous à l'ensemble de Cantor.

IV. L'intérieur du tapis est-il vide ?

On s’est demandé si l’intérieur du tapis était vide.
Pour définir un intérieur, on utilise la notion de boule. Soit x appartenant à l’ensemble des réels et a supérieur à 0, et une boule de rayon a et de centre x, pour tout y appartenant à l’ensemble des réels, la distance (y,x) est inférieure à a. Alors l’intérieur de l’ensemble S, est l’ensemble des x appartenant à S, tel qu’il existe un a supérieur à 0 pour que la boule de centre x et de rayon a soit contenue dans S.
On suppose que le tapis n’est pas d’intérieur vide donc qu’il existe un x appartenant à S, et un a supérieur à 0 tels que la boule soit contenue dans S.
On sait que l’aire de S est égale à 0 (car on a prouvé précédemment que l’aire du tapis tend vers 0). Le rayon a de la boule est supérieur à 0 donc que son aire est aussi supérieure à 0. Or on a supposé qu’elle était contenue dans S dont l’aire est égale à 0. Cette affirmation est absurde, donc on a prouvé que l’intérieur du tapis était vide.

V. **Et si on divise le carré par (2n+1) ?**

Nous allons calculer l’aire du carré pour tout n appartenant à
l’ensemble des entiers naturels.

Pour se faire, nous allons dans un premier temps calculer le nombre de carré générés à chaque itération.

Pour se faire, on a la formule suivante : $S_{n+1} = ((2n+3)^2-1)$ avec $S_0 = 8$

2n+3 correspond au nombre de carré obtenu à chaque itération, auxquels en enlève le carré central (d’où le -1).

Dans un second temps, on va calculer la longueur des côtés des carrés obtenus à chaque itération. Ces derniers sont à chaque fois divisés par 2n+1.

On obtient la formule suivante : $C_{n+1} = \frac{2k+1\ (¿)\ 1}{\prod^{n}_{\square} ¿}$ avec $C_0 = 1$

Cette notation nous permet d’obtenir le produit des termes tout en sautant les termes impairs.

Ainsi, on obtient $C_{n+1} = \frac{2n+1\ ¿\ \frac{\frac{\frac{1}{3}*1}{5}*1}{7}*\ldots*1}{¿}$

Maintenant que nous avons une formule nous indiquant le nombre de carrés obtenus à chaque itération, et une nous indiquant la longueur de leurs côtés respectifs, on peut en déduire cette formule nous permettant de connaître l’aire totale du tapis pour chaque itération :

<u>$A_{n+1} = S_n * C_n^2$</u>

VI. Lien avec la formule de Wallis

Lorsque que l'on conjecture la limite de la suite A_n à l'aide d'un tableur Excel, on voit que cette dernière tend vers $\frac{\pi}{4}$.

Or, la formule de Wallis nous donne une approximation de cette valeur :

2

$$\frac{\pi}{4}=\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{2}{1}*2}{3}*4}{3}*4}{5}*6}{5}*6}{7}\ldots$$

Voyons maintenant le lien avec nos formules :

$$\frac{2n+1 ¿ \frac{2n+1}{¿}*1}{¿}$$

$$C_n^2 = = \frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{1}{3}*1}{3}*1}{5}*1}{5}*1}{7}*1}{7}*\ldots*1}{¿}$$

$S_{n+1} = ((2n+3)^2-1)$

$= (3^2-1)(5^2+1)\ldots((2n+1)^2-1)$

$= (3-1)(3+1)(5+1)(5-1)\ldots((2n+1)-1)((2n-1)-1)$

$= 2*4*4*6\ldots2n*2n+2$

C'est de cette manière que l'on peut établir un lien entre le Tapis de Sierpinski et la formule de Wallis.