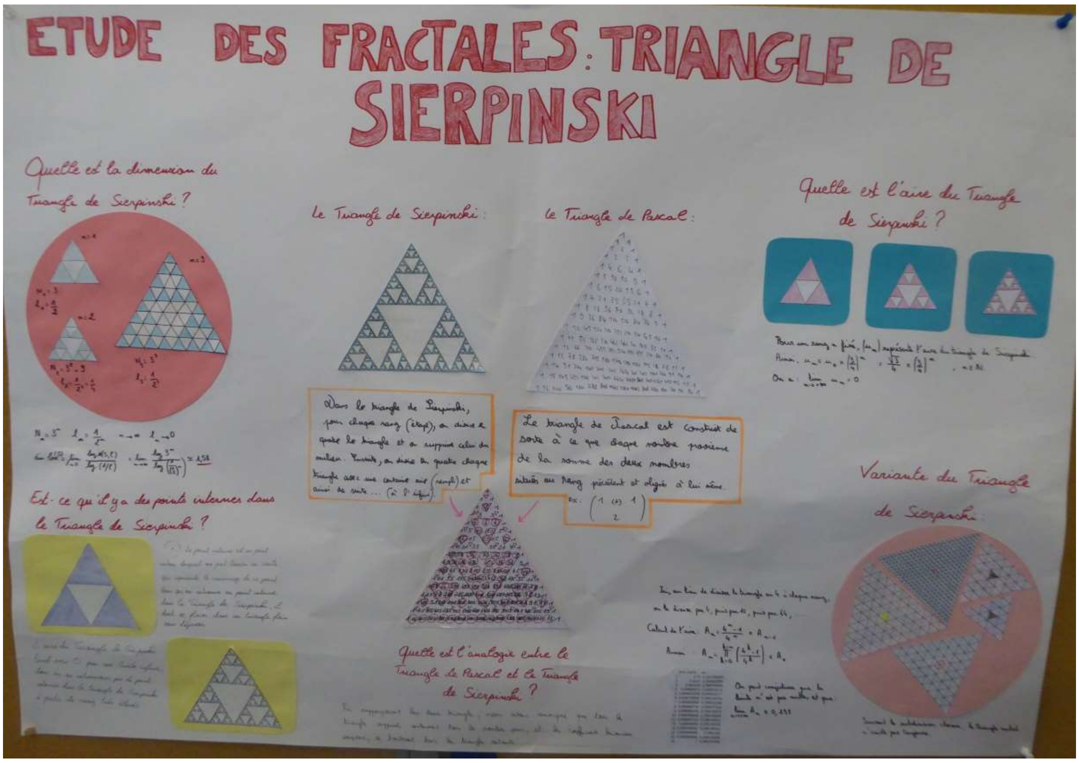
STAGE HIPPOCAMPE

ETUDE DES FRACTALES :

Le triangle de Sierpiński



Marine LAFONT
Antoine CHARROPPIN
Louis CHASTIN
Thibaut DESSUS
Malo GUILLOUX

Introduction

En mathématiques, le triangle de Pascal est une présentation des coefficients binomiaux dans un triangle.
Il fut nommé ainsi en l'honneur du mathématicien français Blaise Pascal (1623-1662).
Il est appelé triangle de Pascal en Occident, bien qu'il fût étudié par d'autres mathématiciens, parfois plusieurs siècles avant lui, en Inde, en Perse, au Maghreb, en Chine (où il est appelé « triangle de Yang Hui »), en Allemagne et en Italie.

Waclav Sierpiński (1882-1969) est un mathématicien polonais.

Sierpiński a étudié au département des mathématiques et de la physique à l'université de Varsovie en 1899.
En 1903, il reçoit une médaille d'or pour son essai sur la théorie des nombres.
Sierpiński a étudié également l'astronomie et la philosophie.
Quelques années auparavant (1863), Dedekind avait énoncé sa théorie des nombres, notamment sur les nombres réels, sur les nombres rationnels et sur les nombres irrationnels.
Dedekind a ouvert la voie aux notations modernes des ensembles de nombres.
Alors que l'affrontement idéologique entre nations caractérise la fin du XIXe et le début du XXe, Dedekind montrera une très grande ouverture d'esprit relativement aux travaux d'autres mathématiciens contemporains (Gallois, Cantor, Peano).

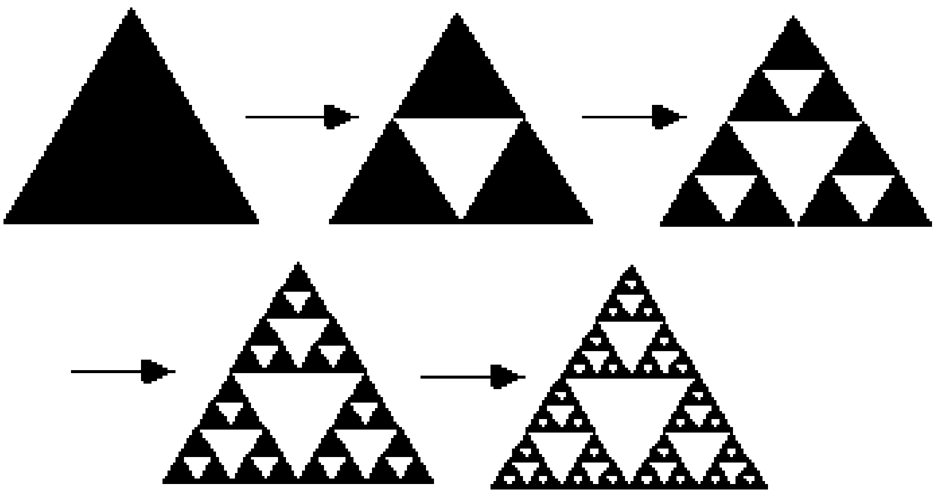
En 1908, Sierpiński obtient son doctorat et est nommé à l'université de Lviv.
Il a travaillé principalement sur la théorie des ensembles, mais également sur la topologie et les fonctions réglées d'une variable réelle.
Dans la théorie des ensembles, il apporte des contributions sur l'axiome du choix et sur l'hypothèse du continu.
Il a également travaillé à ce qui est maintenant appelé la courbe de Sierpiński. Il a continué à collaborer aux recherches de Lusin sur les ensembles analytiques et projectifs.
Son travail sur des fonctions d'une variable réelle incluent des résultats sur les séries de fonctions, la dérivation des fonctions et la classification de Baire.

Waclav Sierpiński a rédigé plus de 700 articles et 50 livres. Il a aussi fortement contribué au développement des mathématiques en Pologne.

Le triangle de Sierpiński

Pour créer le triangle de Sierpiński, on part d'abord d'un triangle équilatéral de côté 1. Il s'agit du rang 0 dans la construction de cette fractale. Ensuite, pour chaque rang (ou étape), on divise le triangle en quatre autres triangles équilatéraux égaux, et on supprime celui du milieu. On répète cette opération un nombre infini de fois.

La création du triangle de Sierpiński peut être modélisée par le schéma ci-dessous :



L'aire supprimée est représentée en blanc.

Le triangle de Pascal

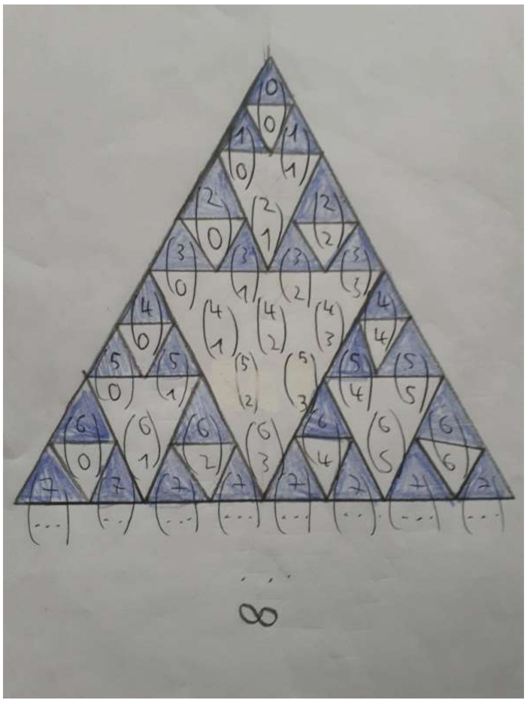
La construction de ce triangle de Pascal est simple,

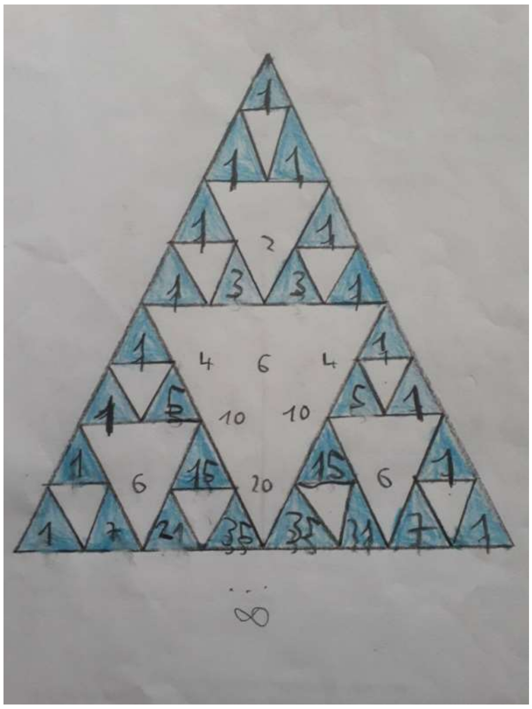
-On part de 1 à la première ligne, par convention c'est la ligne zéro (n = 0)

-Pour avoir un terme de la ligne suivante, on prend les deux termes justes au-dessus, et on les additionne.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Quel est le lien entre ces deux triangles ?





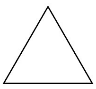
Pour commencer, nous avons voulu comprendre entièrement les deux figures que l'on devait étudier. Nous avons donc passé du temps pour être ensuite plus à l'aise avec le sujet traité. On connaissait déjà le fonctionnement du triangle de Pascal puisque nous l'avions étudié en classe de 1ère. Après avoir bien compris les deux fonctionnements de ces triangles, il nous restait à chercher le lien qui pouvait les unir.
Au début, nous avons travaillé sur les suites des triangles de Pascal et Sierpiński en espérant trouver un lien entre les deux. Mais déterminer ces suites ne nous a pas aidé à répondre à la question posée. Par ailleurs, le calcul de la suite géométrique du triangle de Sierpiński nous a ensuite permis de calculer l'aire de ce triangle (I) et par la suite en déterminer la limite (II).
La superposition de ces deux figures fut notre seconde idée. Lorsque l'on a superposé les deux triangles, on s'est d'abord intéressé aux sommes des nombres compris dans les triangles vides dans le triangle de Sierpiński. Nous avons ensuite trouvé que la somme des nombres de chaque ligne était égale au double de la somme de la ligne précédente.
Puis nous nous sommes rendus compte qu'après superposition des deux triangles pour un rang n égal, le triangle de Sierpiński permet grâce à ses triangles « pleins » d'isoler tous les coefficient binomiaux impairs du triangle de Pascal. Nous n'avons pas pu trouver de lien mathématique vérifiant cette théorie.
Après cela, nous nous sommes intéressés plus profondément au triangle de Sierpiński.

I. Calcul de l’aire du triangle de Sierpiński

On associe la suite U(n) au triangle de Sierpiński tel que :
On calcule l’aire du triangle de base et de côté 1 avec la formule : (b x h/2).
$(b \times h)/2 = (0{,}5\ \sqrt{(3/4)}\ ) / 2$
$= \sqrt{(3)} / 4$
La hauteur est obtenue avec le théorème de Pythagore.

Pour un rang n du triangle, on a $U(n)=U(0) \times q^n$, pour tout entier naturel.
$U(n)= ((\sqrt{3})/4) \times (2/3)^n$
Avec $U(0)= (\sqrt{3})/4$

II. Limite de l’aire



On s’intéresse à l’aire du triangle lorsque n tend vers l’infini.
$\lim_{n\to\infty} U(n)=0$ car $(2/3)^n$ tend vers 0, $(2/3)<1$

III. Points internes dans le triangle de Sierpiński

Un point M est dit interne à une figure F lorsqu’il existe un cercle $C\in F$ le contenant. Si une figure géométrique possède un point interne c'est que ce point ainsi que son cercle peuvent s'insérer dans l'aire de cette figure sans toucher ses bords. Or, nous avons vu précédemment que l'air du triangle de Sierpiński tendait vers 0. Il est donc impossible de trouver des points internes dans ce triangle sans toucher les bords.

IV. Dimension du triangle

En géométrie fractale, la dimension de Minkowski, ou dimension box-counting, est une manière de déterminer la dimension fractale d’un sous-ensemble S dans une espace euclidien…….. Pour calculer cette dimension pour un ensemble S, nous définissons N(S,l) comme le nombre de « petits triangles équilatéraux pleins» de longueur l nécessaire pour recouvrir S.
On a alors :
$\dim box (S)= \lim_{n\to 0} [\log N(S,l)] / [\log (1/l)]$

On peut appliquer cette formule pour n'importe quel rang n du triangle de Sierpiński, le résultat est le même. Ainsi, au rang 2 :

$$\dim_{box}(S) = \lim_{n \to 0} [\log(1/9)] / [\log(1/4)]$$

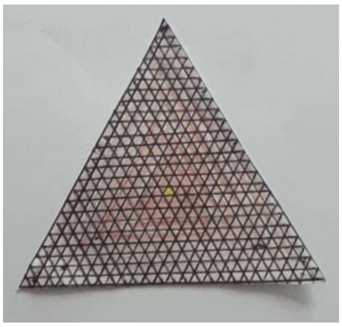
$\simeq 1,585$ à 10^(-3) près

Plus généralement, on a pour un rang n du triangle de Sierpiński :

$$\dim_{box}(S) = \lim_{n \to 0} [\log(1/3^n)] / [\log(1/2^n)]$$

La dimension étant de 1,58, on peut dire que le triangle de Sierpiński se situe « quelque part » entre la dimension 1 et la dimension 2, c'est-à-dire entre une courbe (dimension 1) et une surface (dimension 2).

V. Variante du triangle de Sierpiński



Après avoir étudié le triangle de Sierpiński, nous nous sommes demandés si nous pouvions le diviser en plus de parties, et si cela allait changer sa dimension, son aire.
Pour cela, nous avons essayé de diviser le côté du triangle en 4, 5, 7, 8, 9, 11, 16 , 25, … Le problème est que pour 8 et 9, il n'apparait pas de triangle au milieu de la figure à supprimer.
Nous en avons donc conclu que nous ne pouvions pas diviser le triangle de Sierpiński avec n'importe quel nombre.
On a donc décidé qu'au lieu de diviser le triangle en quatre parties égales à chaque rang, on le diviserait en 4, puis en 16, puis en 64, … On divise donc les triangles restants de la figure en 4^n pour un rang n du triangle de Sierpiński.
Nous avons alors trouvé une formule pouvant exprimer l'aire de cette figure.
Calcul de l'aire : $A(n)=(4^n - 1) / (4^n) \times A(n-1)$
Ainsi : $A(n)= \prod_{K=0} ((4^k) -1) / (4^k) \times A(0)$

Grâce à Excel, on regarde comment évolue cette suite lorsque n tend vers l'infini. (voir feuille d'exposé faite à Luminy).
On peut conjecturer que la limite de cette suite n'est pas nulle et que $\lim_{n \to \infty} A(n)=0,298$

Ce travail nous a permis d'étudier de nouvelles notions telles que les fractales.

Nous avons également pu expérimenter le travail de groupe, en effectuant un travail de recherche.

Après avoir exploré individuellement de nombreuses pistes, nous avons ensuite mis en commun nos différentes découvertes.
On a alors décidé de modifier notre méthode de travail, et de travailler tous ensemble.
Cela nous a permis d'aborder d'une autre façon le sujet.

<u>Points positifs</u> :

Nous avons découverts ainsi, les bienfaits du travail de groupe.
De plus, cela a enrichi nos connaissances en mathématiques.
Ce stage nous a en quelques sortes préparé pour les études supérieures, nous faisant découvrir un nouveau cadre et une nouvelle ambiance de travail. Malgré les difficultés rencontrées, notre tuteur a toujours été présent pour nous remotiver ou nous aider.
A aucun moment, nous nous sommes sentis perdus.

<u>Points négatifs</u> :

Cependant, le sujet nous a été transmis sans réelle question intermédiaire.
Nous n'avions donc aucune idée de comment traiter le sujet donné.
La première journée fut difficile car on ne savait pas bien ce qu'il fallait trouver puisque nous venions de découvrir les fractales.